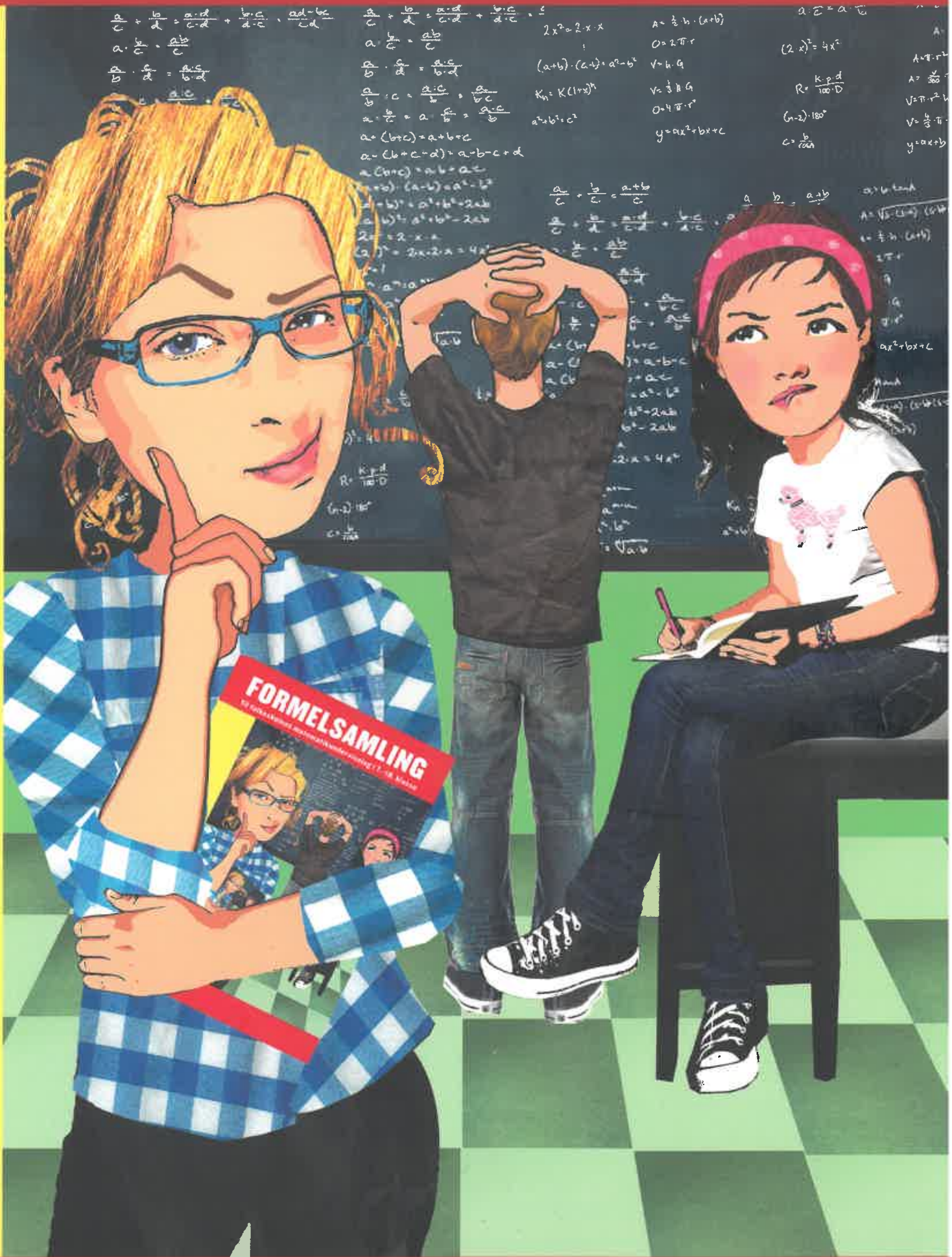
FORMELSAMLING

Til folkeskolens matematikundervisning i 7.-10. klasse



Matematik · **7.-10. klasse** · Formelsamling

Alinea

Forord

Kære elev

Denne formelsamling skal du bruge i dit daglige arbejde med matematik, og når du skal til prøve efter 9. klasse eller 10. klasse. Vi håber, at du får glæde af den.

Du kan slå op i formelsamlingen, når du kommer i tvivl om, hvordan man fx beregner rumfanget af en kegle, finder variationsbredden i en undersøgelse, eller tegner en trekants omskrevne cirkel. Der er vist, hvordan man gør, og der er mange praktiske og teoretiske eksempler. Eksemplerne står i de farvede bokse.

Thomas skal køre fra København til Nykøbing F.
Der er 128 km. Han har kørt 8 % af strækningen.
Hvor mange kilometer svarer det til?

8 % af 128 = $0{,}08 \cdot 128 = 10{,}24$ km

Det er en god ide, at du bruger formelsamlingen til hverdag, så du på forhånd ved, hvad du kan finde, og hvor du kan finde det. Der er også plads til at skrive formlerne med dine egne ord, eller du kan tilføje flere eksempler, egne notater eller nye formler.

Du må medbringe formelsamlingen til prøven i matematisk problemløsning efter 9. klasse og til prøven efter 10. klasse, men desværre *ikke* til prøven i matematiske færdigheder.

Indhold

Tal og algebra

Geometri

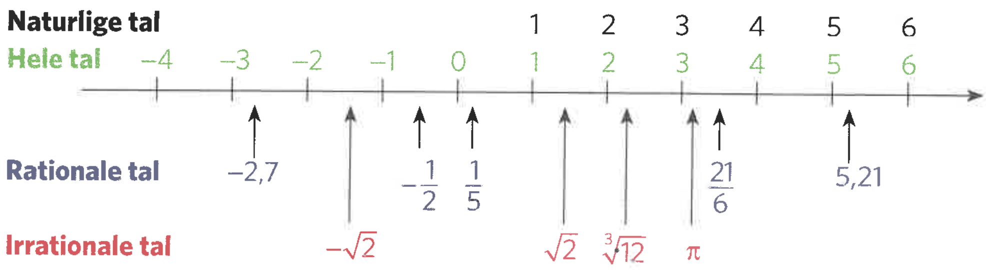
Statistik og sandsynlighed

Matematik i anvendelse

Tal og algebra

Tal

Reelle tal



Naturlige tal: Alle hele, positive tal.
Hele tal: Alle positive og negative tal samt 0.
Rationale tal: Alle naturlige tal, alle hele tal og alle brøker.
Irrationale tal: Alle uendelige decimaltal, der ikke ender med en periode.

Primtal

Et primtal er et naturligt tal med netop to divisorer, nemlig 1 og tallet selv.
De første 15 primtal: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47

Sammensatte tal

Alle naturlige tal, der ikke er primtal, er sammensatte tal.
Sammensatte tal kan skrives som et produkt af primtal.

1 er hverken er primtal eller et sammensat tal.

10, 121 og 2.835 er sammensatte tal.

$2 \cdot 5 = 10$

$2^2 \cdot 3 \cdot 11 = 132$

$3^4 \cdot 5 \cdot 7 = 2.835$

Intervaller

$[a;b]$ eller $a \leqq x \leqq b$

Lukket interval fra og med a til og med b.

Det bliver mindst –5 °C og højst 2 °C i morgen.
$[-5;2]$ eller $-5 \leqq x \leqq 2$
Både –5 og 2 er med i intervallet.

$]a;b[$ eller $a < x < b$

Åbent interval fra a til b.

Det bliver mere end –5 °C, men mindre end 2 °C i morgen.
$]-5:2[$ eller $-5 < x < 2$
Hverken –5 eller 2 er med i intervallet.

$]a;b]$ eller $a < x \leqq b$

Halvåbent interval fra a til og med b.

Det bliver mere end –5 °C, men højst 2 °C i morgen.
$]-5;2]$ eller $-5 < x \leqq 2$
–5 er ikke med, men 2 er med i intervallet.

$]-\infty;b]$ eller $x \leqq b$

Halvåbent interval fra –∞ til og med b.

Det bliver højst 2 °C i morgen.
$]-\infty;2]$ eller $x \leqq 2$
2 er med i intervallet.

Brøker

$$\frac{a}{b}$$

Tæller

Nævner

Forlænge og forkorte

Når du skal forlænge eller forkorte en brøk, skal du gange eller dividere tæller og nævner med det samme tal.

$$\frac{a}{b} = \frac{a \cdot c}{b \cdot c} \qquad \frac{2}{3} = \frac{2 \cdot 4}{3 \cdot 4} = \frac{8}{12}$$

$$\frac{ad}{bd} = \frac{a}{b} \qquad \frac{30}{35} = \frac{30 : 5}{35 : 5} = \frac{6}{7}$$

Regneregler

$$\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a + b}{c} \qquad \frac{4}{9} + \frac{3}{9} = \frac{4 + 3}{9} = \frac{7}{9}$$

$$\frac{a}{c} - \frac{b}{c} = \frac{a - b}{c} \qquad \frac{8}{11} - \frac{3}{11} = \frac{8 - 3}{11} = \frac{5}{11}$$

$$a \cdot \frac{b}{c} = \frac{a \cdot b}{c} \qquad 2 \cdot \frac{4}{9} = \frac{2 \cdot 4}{9} = \frac{8}{9}$$

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d} \qquad \frac{3}{7} \cdot \frac{1}{4} = \frac{3 \cdot 1}{7 \cdot 4} = \frac{3}{28}$$

$$\frac{a}{b} : c = \frac{a}{b \cdot c} \qquad \frac{5}{9} : 4 = \frac{5}{9 \cdot 4} = \frac{5}{36}$$

$$a : \frac{b}{c} = a \cdot \frac{c}{b} \qquad 2 : \frac{3}{4} = 2 \cdot \frac{4}{3} = \frac{2 \cdot 4}{3} = \frac{8}{3}$$

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} \qquad \frac{2}{5} : \frac{3}{7} = \frac{2}{5} \cdot \frac{7}{3} = \frac{2 \cdot 7}{5 \cdot 3} = \frac{14}{15}$$

Potenser

a^n ← Eksponent

Rod

En potens er produktet af ens faktorer.

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{\text{n faktorer}}$$

$3^5 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 243$

Regneregler

$a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$ $10^{-4} = \dfrac{1}{10^4} = \dfrac{1}{10\,000} = 0{,}0001$

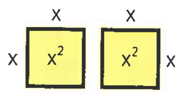
$a^0 = 1$ $5^0 = 1$

$a^n \cdot a^p = a^{n+p}$ $2^4 \cdot 2^5 = 2^{4+5} = 2^9$

$\dfrac{a^n}{a^p} = a^{n-p}$ $\dfrac{5^6}{5^2} = 5^{6-2} = 5^4$

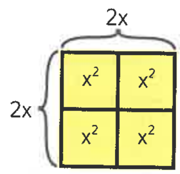
$(a^n)^p = a^{n \cdot p}$ $(3^2)^4 = 3^{2 \cdot 4} = 3^8$

$2 \cdot x^2 = 2 \cdot x \cdot x$



$2 \cdot 3^2 = 2 \cdot 9 = 18$

$(2 \cdot x)^2 = (2x) \cdot (2x) = 2 \cdot x \cdot 2 \cdot x = 4x^2$



$(2 \cdot 3)^2 = 6^2 = 36$

Tierpotenser

10^n

En tierpotens er en potens med roden 10, hvor eksponenten er et helt tal.

$10^5 = 100.000$

Tal med mange cifre kan skrives kortere ved hjælp af tierpotenser.

$7{,}3 \cdot 10^6 = 7.300.000$

$4{,}5 \cdot 10^{-4} = 4{,}5 \cdot \dfrac{1}{10^4} = 0{,}00045$

KOPIERING FORBUDT

Kvadratrødder

$$\sqrt{a}$$

Radikand

$\sqrt{a} \cdot \sqrt{a} = a$

$\sqrt{4} \cdot \sqrt{4} = 4$

Regneregler

$\sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$

$\sqrt{16 \cdot 2} = \sqrt{16} \cdot \sqrt{2} = 4\sqrt{2}$

$$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$$

$$\sqrt{\frac{4}{25}} = \frac{\sqrt{4}}{\sqrt{25}} \quad \frac{2}{5}$$

Kubikrødder

Rodeksponent

$$\sqrt[3]{a}$$

Radikand

$\sqrt[3]{b} \cdot \sqrt[3]{b} \cdot \sqrt[3]{b} = b$

$\sqrt[3]{8} \cdot \sqrt[3]{8} \cdot \sqrt[3]{8} = 8$

Regneregler

$\sqrt[3]{a \cdot b} = \sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[3]{b}$

$\sqrt[3]{8 \cdot 27} = \sqrt[3]{8} \cdot \sqrt[3]{27} = 2 \cdot 3 = 6$

$$\sqrt[3]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{b}}$$

$$\sqrt[3]{\frac{125}{27}} = \frac{\sqrt[3]{125}}{\sqrt[3]{27}} = \frac{5}{3}$$

© KOPIERING FORBUDT

Regneregler

Parentesregler

Plusparenteser kan fjernes uden videre (både regnetegnet og parentesen).

$a + (b - c + d) = a + b - c + d$

$6 + (x + 3 - y) = 6 + x + 3 - y = 9 + x - y$

Fortegn:
+ og –

Minusparenteser kan fjernes (både regnetegnet og parentesen), hvis man ændrer alle fortegn inde i parentesen.

$a - (b - c + d) = a - b + c - d$

$6 - (x + 3 - y) = 6 - x - 3 + y = 3 - x + y$

Multiplikation med flerleddede størrelser

$a \cdot (b - c + d) = a \cdot b - a \cdot c + a \cdot d$

$6 \cdot (x - 3 + y) = 6x - 18 + 6y$

$(a + b) \cdot (c + d) = a \cdot c + a \cdot d + b \cdot c + b \cdot d$

$(2 + x) \cdot (7 + y) = 14 + 2y + 7x + xy$

	c	d
a	$a \cdot c$	$a \cdot d$
b	$b \cdot c$	$b \cdot d$

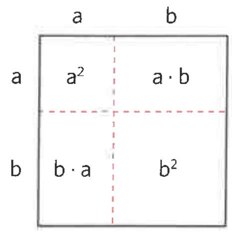
$(a + b) \cdot (c - d) = a \cdot c - a \cdot d + b \cdot c - b \cdot d$

$(6 + x) \cdot (3 - y) = 18 - 6y + 3x - xy$

Kvadratet på en toleddet størrelse

$(a + b)^2 = (a + b) \cdot (a + b) = a^2 + b^2 + 2ab$

$(4 + y)^2 = 4^2 + y^2 + 2 \cdot 4 \cdot y = 16 + y^2 + 8y$



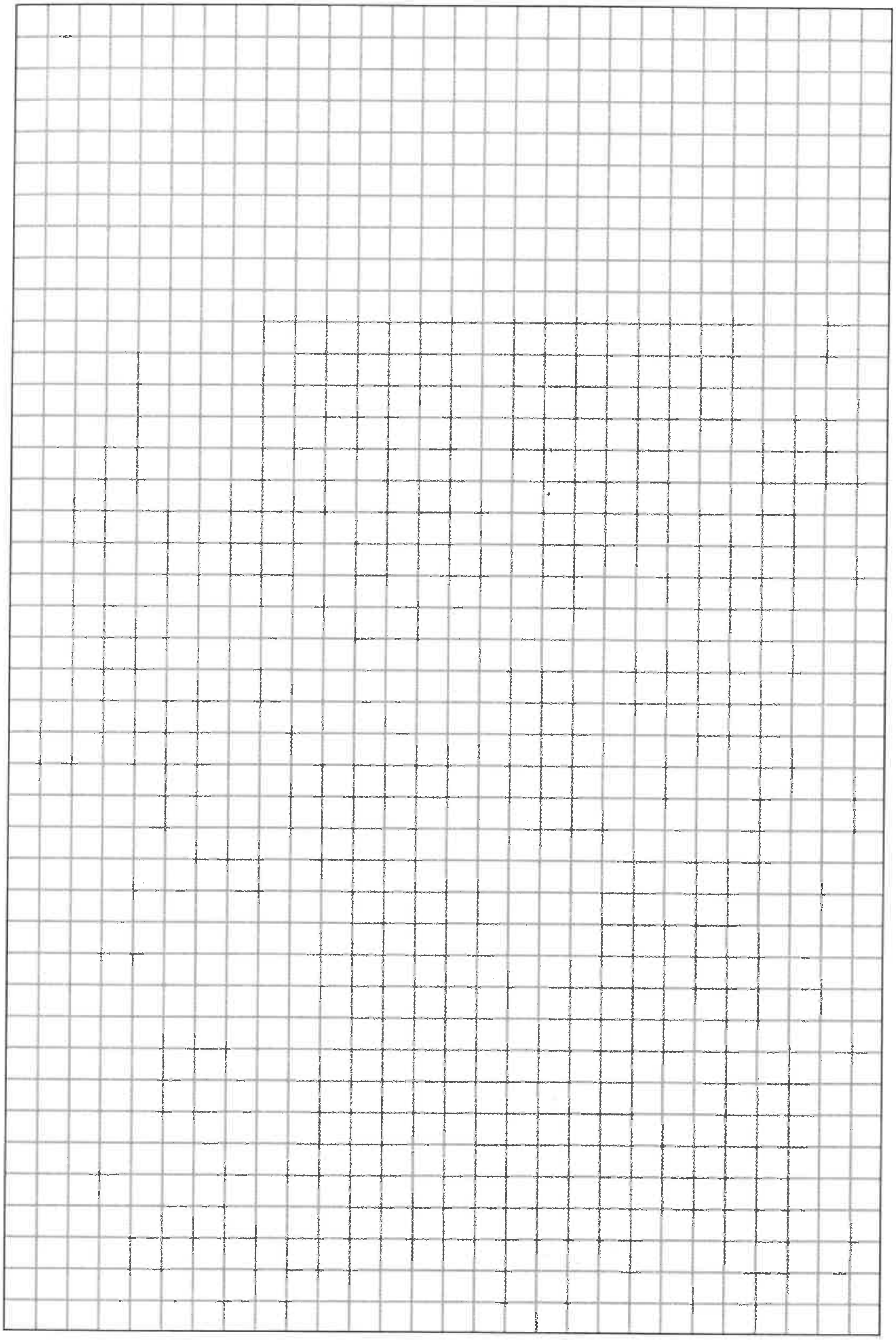
$(a - b)^2 = (a - b) \cdot (a - b) = a^2 + b^2 - 2ab$

$(4 - y)^2 = 4^2 + y^2 - 2 \cdot 4 \cdot y = 16 + y^2 - 8y$

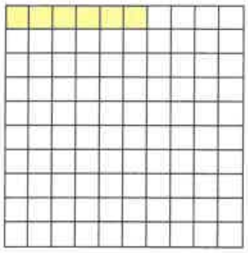
To tals sum gange de samme to tals differens

$(a + b) \cdot (a - b) = a^2 - b^2$

$(4 + x) \cdot (4 - x) = 16 - x^2$



Procent



Procent = Hundrededele

$6\,\% = 6 \text{ ud af } 100 = \frac{6}{100} = 0{,}06$

Hvor meget er x % af y?

$\frac{x}{100} \cdot y$

Thomas skal køre fra København til Nykøbing F. Der er 128 km.
Han har kørt 8 % af strækningen.
Hvor mange kilometer svarer det til?

$8\,\% \text{ af } 128 = 0{,}08 \cdot 128 = 10{,}24 \text{ km}$

Hvor mange procent er x ud af y?

$\frac{x}{y} \cdot 100$

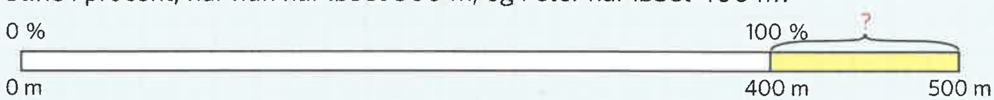
Mette sælger 300 m^2 af sin grund. Grunden var 1.500 m^2.
Hvor mange procent har hun solgt fra?

$\frac{300}{1.500} = 0{,}20 = 20\,\%$

Hvor mange procent er x større end y?

$\frac{x - y}{y} \cdot 100$

Stine og Peter løber i lige lang tid. Stine løber længst. Hvor meget længere løber Stine i procent, når hun har løbet 500 m, og Peter har løbet 400 m?

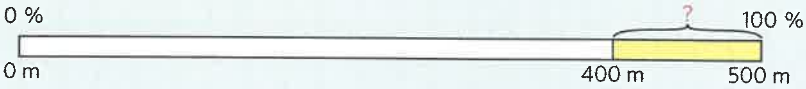


$\frac{500 - 400}{400} = 0{,}25 = 25\,\%$

Hvor mange procent er y mindre end x?

$$\frac{x-y}{x} \cdot 100$$

Stine har løbet 500 m. Peter har løbet 400 m.
Hvor mange procent kortere løber Peter end Stine?

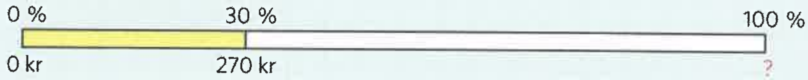


$$\frac{500-400}{500} = 0{,}20 = 20\,\%$$

Hvad er 100 % hvis x % svarer til y?

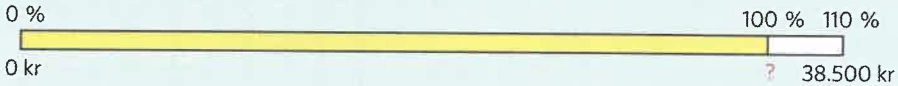
$$\frac{y}{x} \cdot 100$$

Rune får 30 % i rabat på et par jeans. Rabatten svarer til 270 kr.
Hvor stor var den oprindelige pris?



$$\frac{270}{30} \cdot 100 = 900 \text{ kr.}$$

Nina får lønforhøjelse på 10 %. Hendes nye løn er på 38.500 kr.
Hvor meget fik hun tidligere i løn?



$$\frac{38.500}{110} \cdot 100 = 35.000 \text{ kr.}$$

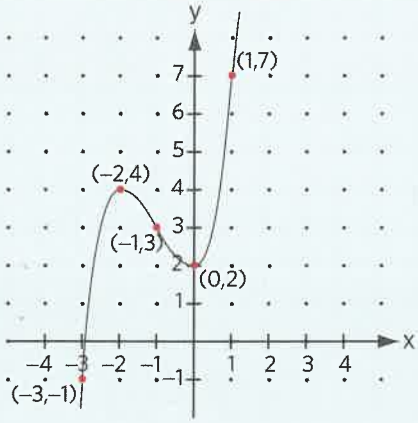
Funktioner

Funktioner beskriver sammenhængen mellem to variable størrelser, x og y.

Til hver x-værdi findes kun en y-værdi.

$y = x^3 + 3x^2 + x + 2$

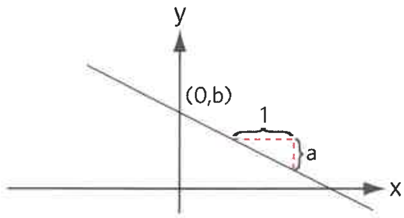
x	−3	−2	−1	0	1
y	−1	4	3	2	7



Lineære funktioner

Funktionsforskriften for en ret linje:
$y = ax + b$

a: Linjens hældningskoefficient
b: Linjens skæringspunkt med y-aksen (0,b)



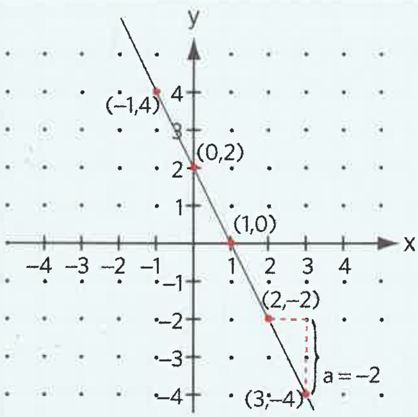
Når du kender a og b, kan du beregne skæringspunktet med x-aksen: $\left(-\frac{b}{a},0\right)$

$y = -2x + 2$

x	−1	0	1	2	3
y	4	2	0	−2	−4

Skæringspunkt med x-aksen:

$\left(-\frac{2}{-2},0\right) = (1,0)$



Andengradsfunktioner

Funktionsforskriften for andengradsfunktioner:

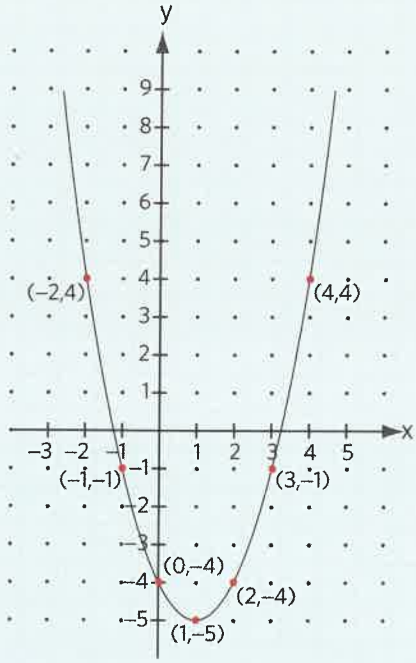
$y = ax^2 + bx + c$

Grafen for en andengradsfunktion er en parabel.

$y = x^2 - 2x - 4$

Tabel:

x	−2	−1	0	1	2	3	4
y	4	−1	−4	−5	−4	−1	4

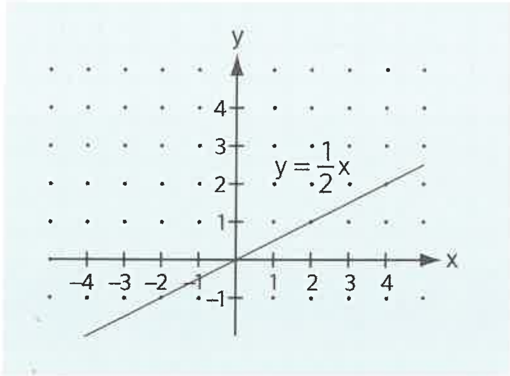


Ligefrem proportionalitet

Grafen for ligefrem proportionalitet er en ret linje, der går gennem (0,0).

Forskrift for ligefrem proportionalitet:

$y = ax$

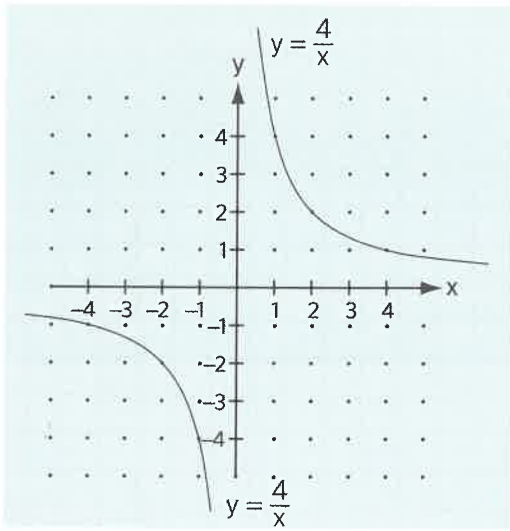


Omvendt proportionalitet

Grafen for omvendt proportionalitet er en hyperbel.

Forskrift for omvendt proportionalitet:

$y = \frac{a}{x}$ $\qquad x \neq 0$



Vækstfunktioner

Lineær vækst

$y = ax + b$

a: Vækst i hver periode
b: Begyndelsesværdi

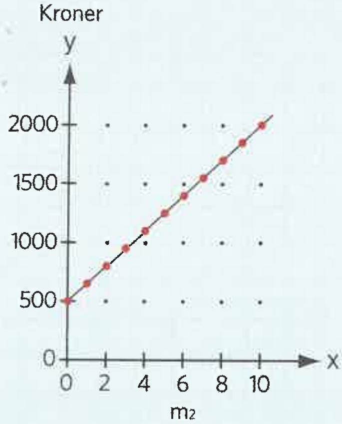
Hvis væksten er negativ ($a < 0$) er der tale om et fald.

Et byggemarked sælger fliser til 150 kr. pr. m^2. Hvis kunden ønsker at få leveret fliserne i stedet for at afhente selv, koster det 500 kr. i leveringsgebyr.

$a = 150$ kr.
$b = 500$ kr.

x: Antal m^2
y: Pris

$y = 150x + 500$



Eksponentiel vækst

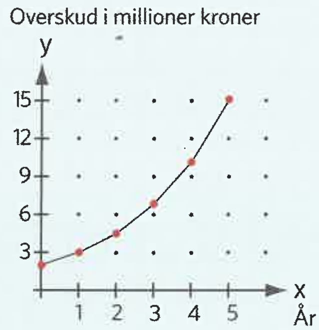
Når man vil kende den nye værdi (K_n), hvis et antal (K) vokser med en bestemt procentsats (r) i et antal perioder (n):

$K_n = K(1 + r)^n$

K: Startværdi
r: Vækst pr. periode angivet som decimaltal
n: Antal vækstperioder
K_n: Værdi efter n perioder

Hvis r er negativ ($r < 0$), er der tale om et fald.

En virksomhed har 2 mio. kr. i overskud.
Ved at effektivisere produktionen forventer virksomheden at øge overskuddet med 50 % årligt.
Hvor stort et overskud forventes efter 5 år?



$K = 2.000.000$
$r = 50\,\% = 0,5$
$n = 5$

$K_5 = 2.000.000 \cdot (1 + 0,5)^5 = 15.187.500$ kr.

Grafisk ligningsløsning

Ligning

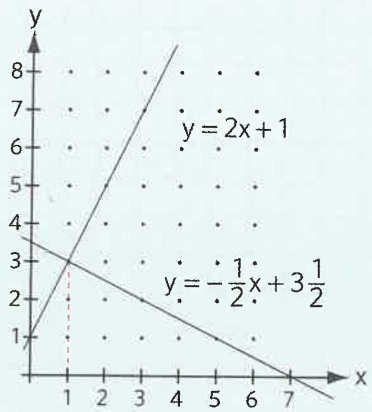
Ligninger med et x på hver side af lighedstegnet kan betragtes som funktionsforskrifter og løses ved tegning i et koordinatsystem.
Løsningen findes ved at aflæse skæringspunktets x-værdi.

$$2x+1=-\frac{1}{2}x+3\frac{1}{2}$$

I: $y=2x+1$

II: $y=-\frac{1}{2}x+3\frac{1}{2}$

Løsning: $x=1$



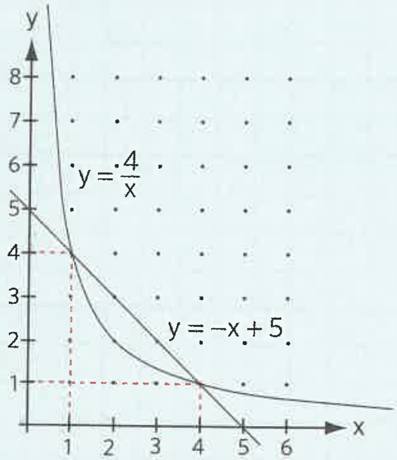
To ligninger med to ubekendte

To ligninger med to ubekendte kan betragtes som funktionsforskrifter og løses ved tegning i et koordinatsystem.
Løsningerne findes ved at aflæse skæringspunkterne.

$$\begin{cases} y=-x+5 \\ y=\frac{4}{x} \end{cases}$$

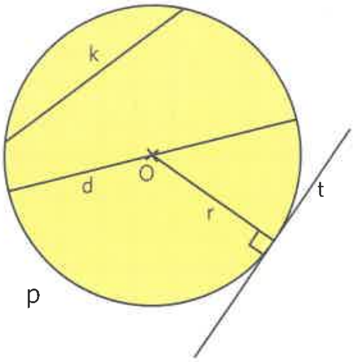
Løsninger:

$(x,y)=(1,4)$ og $(x,y)=(4,1)$



Geometri

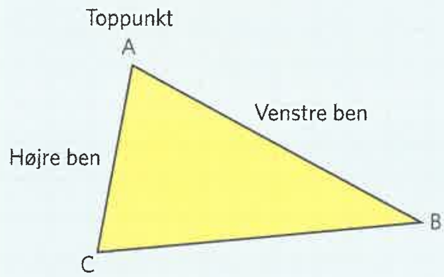
Cirkler



O: Cirklens centrum
p: Cirkelperiferien
d: Cirklens diameter
r: Cirklens radius. $r = \frac{1}{2} \cdot d$

t: Tangent til cirklen. En tangent rører cirkelperiferien i netop et punkt og står vinkelret på radius.
k: Korde til cirklen. Den længste korde er d.

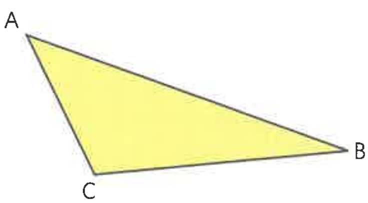
Vinkler



$\angle A = \angle BAC = \angle CAB$

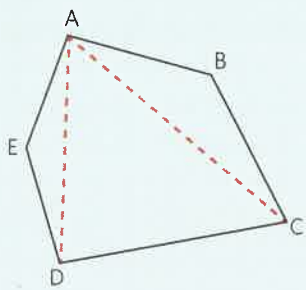
Vinkelsum

Vinkelsummen i en trekant er 180°.
$\angle A + \angle B + \angle C = 180°$



Vinkelsummen i en n-kant:
$(n - 2) \cdot 180°$

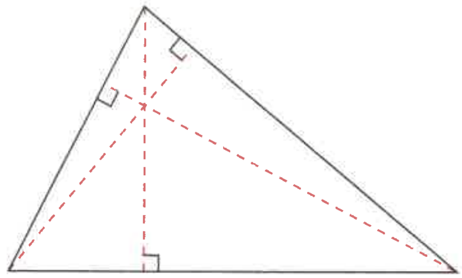
Vinkelsummen i en 5-kant:
$(5 - 2) \cdot 180° = 540°$



Trekanter

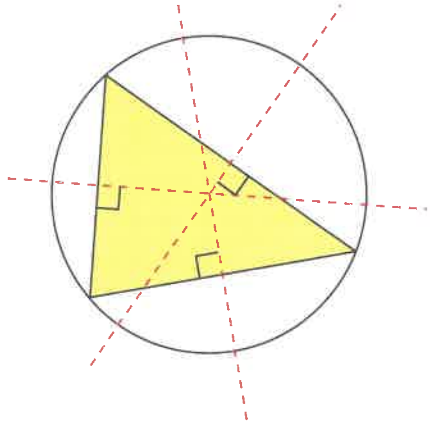
Højde

Højden i en trekant står vinkelret på grundlinjen og rammer den modstående vinkelspids.
En trekant har tre højder, der skærer hinanden i et punkt. En højde kan ligge uden for trekanten.



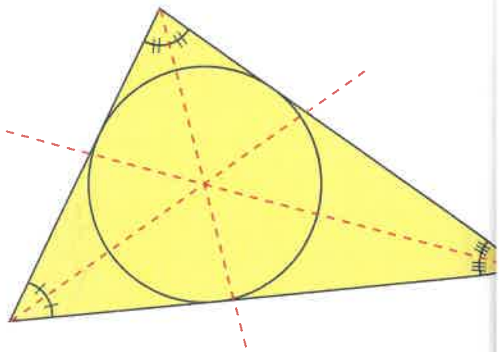
Midtnormal

Midtnormalen er en linje, der står vinkelret på en side og går gennem sidens midtpunkt.
En trekant har tre midtnormaler, der skærer hinanden i et punkt.
Trekantens omskrevne cirkel har centrum i skæringspunktet mellem trekantens midtnormaler. Cirkelperiferien rammer trekantens hjørner.



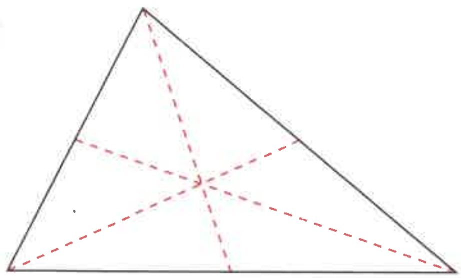
Vinkelhalveringslinje

Vinkelhalveringslinjen deler en vinkel i to lige store dele.
En trekant har tre vinkelhalveringslinjer, der skærer hinanden i et punkt.
Trekantens indskrevne cirkel har centrum i skæringspunktet mellem trekantens vinkelhalveringslinjer. Cirkelperiferien tangerer trekantens sider.



Median

Medianen i en trekant er et linjestykke fra en vinkelspids til midtpunktet af den modstående side.
En trekant har tre medianer, der skærer hinanden i et punkt.



Ensvinklede trekanter

Ensvinklede trekanter har parvis lige store vinkler.
Ensvinklede trekanter er ligedannede. Når $\triangle ABC$ er ensvinklet med $\triangle A_1B_1C_1$ er forholdet mellem de ensliggende sider konstant.

$\angle A = \angle A_1$

$\angle B = \angle B_1$

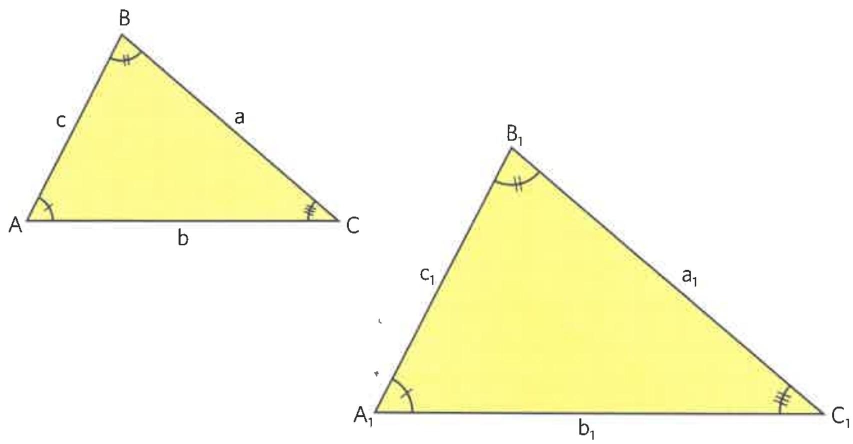
$\angle C = \angle C_1$

$\frac{a}{a_1} = \frac{b}{b_1} = \frac{c}{c_1}$

$\frac{a}{b} = \frac{a_1}{b_1}$

$\frac{b}{c} = \frac{b_1}{c_1}$

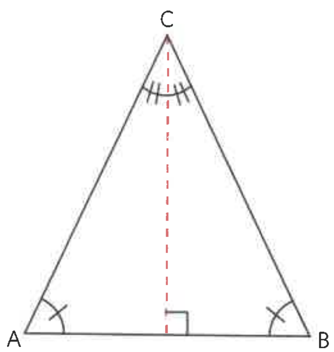
$\frac{a}{c} = \frac{a_1}{c_1}$



Ligebenede trekanter

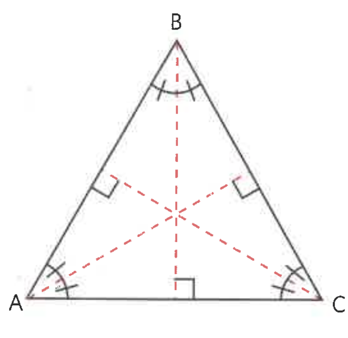
I en ligebenet trekant er to af vinklerne lige store.

$\angle A = \angle B$

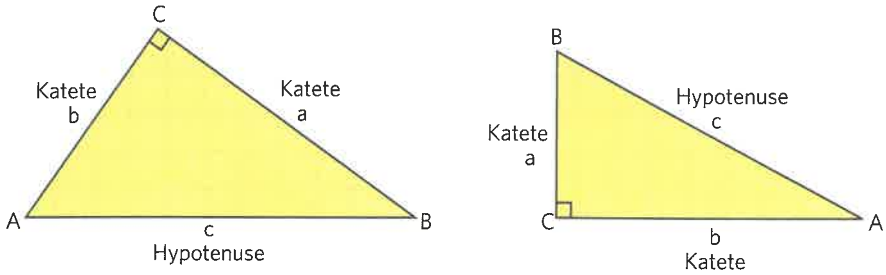


Ligesidede trekanter

I en ligesidet trekant er alle vinkler 60°.
Alle sider er lige lange.
Højde, vinkelhalveringslinje, median og midtnormal er sammenfaldende.



Retvinklede trekanter

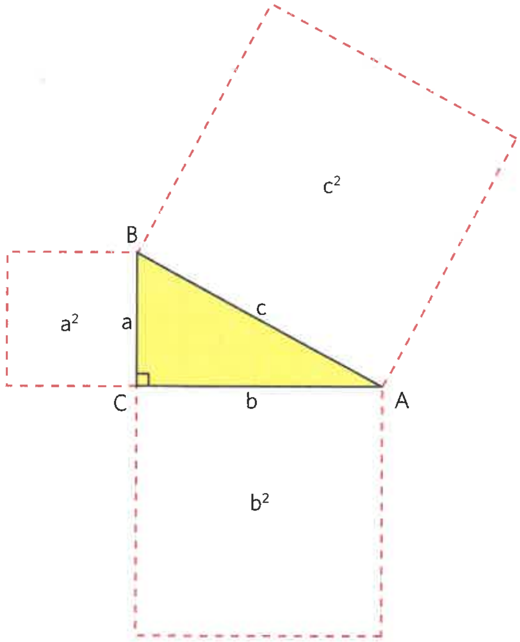


Pythagoras' sætning

I en retvinklet trekant er summen af kateternes kvadrater lig med kvadratet på hypotenusen.

$a^2 + b^2 = c^2$
C er den rette vinkel.

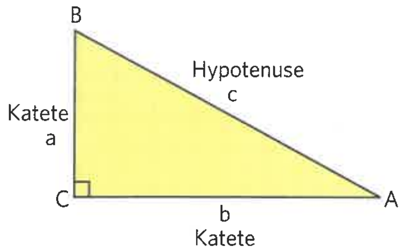
$c^2 = a^2 + b^2$
$b^2 = c^2 - a^2$
$a^2 = c^2 - b^2$



Hvis $a^2 + b^2 = c^2$ i $\triangle ABC$,
er trekanten retvinklet og
$\angle C$ er den rette vinkel.

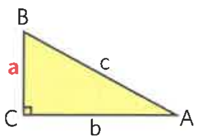
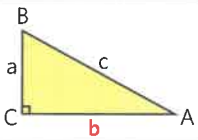
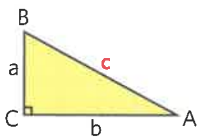
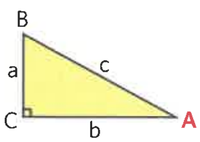
$a = 3$	$a = 5$
$b = 4$	$b = 6$
$3^2 + 4^2 = 9 + 16 = 25$	$5^2 + 6^2 = 25 + 36 = 61$
$c = 5$	$c = 8$
$5^2 = 25$	$8^2 = 64$
$25 = 25$	$61 \neq 64$
Trekanten er retvinklet.	Trekanten er ikke retvinklet.

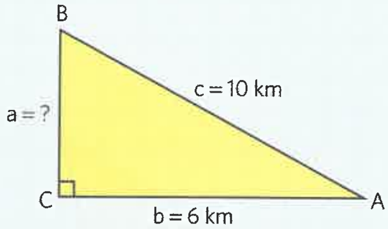
Trigonometri



a ligger overfor ∠A og kaldes den modstående katete til ∠A.
b er et af benene ved ∠A og kaldes den hosliggende katete til ∠A.
c ligger overfor ∠C (den rette vinkel) og kaldes hypotenusen.

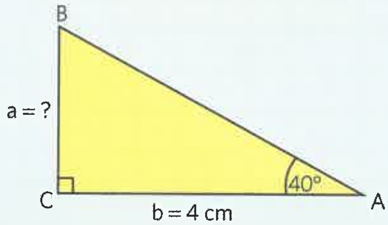
Du kan bruge følgende formler til at beregne sider og vinkler i retvinklede trekanter.

Du vil finde:	Du kender:	Du kan bruge denne formel:
	b og c	$a = \sqrt{c^2 - b^2}$
	b og ∠A	$a = b \cdot \tan A$
	b og ∠B	$a = \dfrac{b}{\tan B}$
	c og ∠A	$a = c \cdot \sin A$
	a og c	$b = \sqrt{c^2 - a^2}$
	c og ∠A	$b = c \cdot \cos A$
	a og b	$c = \sqrt{a^2 + b^2}$
	a og ∠A	$c = \dfrac{a}{\sin A}$
	b og ∠A	$c = \dfrac{b}{\cos A}$
	a og b	$\tan A = \dfrac{a}{b}$
	a og c	$\sin A = \dfrac{a}{c}$
	b og c	$\cos A = \dfrac{b}{c}$



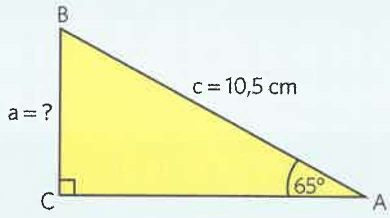
$$a = \sqrt{c^2 - b^2}$$

$$a = \sqrt{10^2 - 6^2} = 8 \text{ km}$$



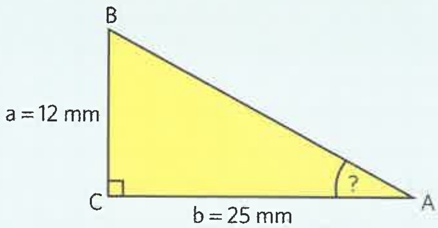
$$a = b \cdot \tan A$$

$$a = 4 \cdot \tan 40° \approx 3{,}36 \text{ cm}$$



$$a = c \cdot \sin A$$

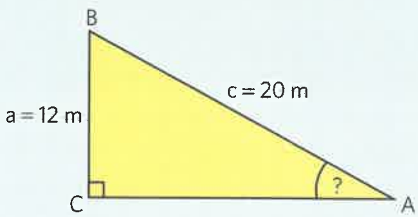
$$a = 10{,}5 \cdot \sin 65° \approx 9{,}52 \text{ cm}$$



$$\tan A = \frac{a}{b}$$

$$\tan A = \frac{12}{25} = 0{,}48$$

$$\angle A = \tan^{-1}(0{,}48) \approx 26°$$



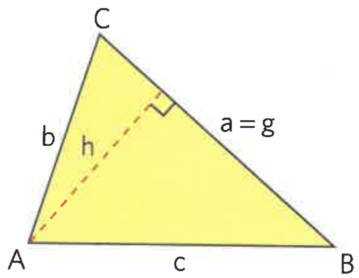
$$\sin A = \frac{a}{c}$$

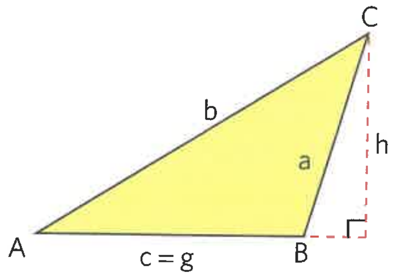
$$\sin A = \frac{12}{20} = 0{,}6$$

$$\angle A = \sin^{-1}(0{,}6) \approx 37°$$

Areal og omkreds

Trekanter





Du kender en grundlinje og den tilhørende højde:

$$A = \frac{1}{2} \cdot h \cdot g$$

$h = 5$ cm $\quad g = 4$ cm

$$A = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 4 = 10 \text{ cm}^2$$

Du kender alle 3 sidelængder:

Herons formel:

$$A = \sqrt{s \cdot (s-a) \cdot (s-b) \cdot (s-c)}$$

s er den halve omkreds:

$$s = \frac{a+b+c}{2}$$

$a = 6$ m $\quad b = 4$ m $\quad c = 8$ m

$$s = \frac{6+4+8}{2} = 9$$

$$A = \sqrt{9 \cdot (9-6) \cdot (9-4) \cdot (9-8)} \approx 11{,}62 \text{ m}^2$$

Du kender to sider og den vinkel, der ligger mellem dem:

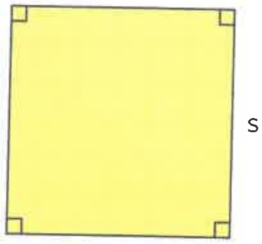
$$A = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot \sin C$$

$a = 4$ mm $\quad b = 8$ mm $\quad \angle C = 50°$

$$A = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 8 \cdot \sin 50° \approx 12{,}26 \text{ mm}^2$$

Firkanter

Kvadrater



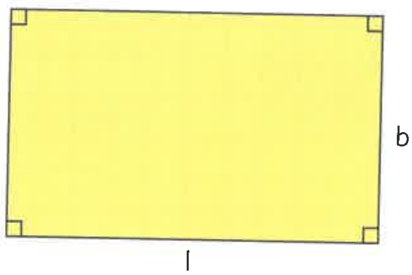
s: Sidelængde
A: Areal
O: Omkreds

$A = s^2$
$O = 4s$

$s = 5$ cm

$A = 5^2 = 25$ cm^2
$O = 4 \cdot 5 = 20$ cm

Rektangler



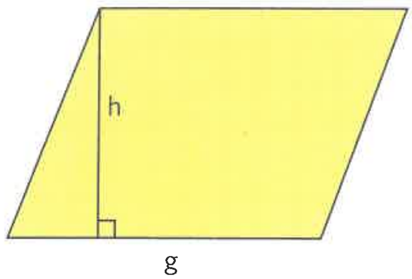
l: Længde
b: Bredde
A: Areal
O: Omkreds

$A = l \cdot b$
$O = 2 \cdot (l + b)$

$l = 4$ km
$b = 6$ km

$A = 4 \cdot 6 = 24$ km^2
$O = 2 \cdot (4 + 6) = 2 \cdot 10 = 20$ km

Parallelogrammer



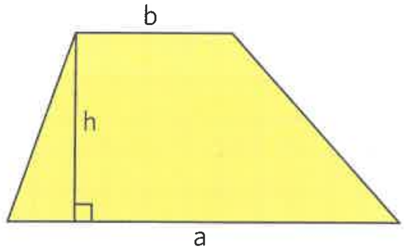
h: Højde
g: Grundlinje
A: Areal

$A = h \cdot g$

$h = 5$ m
$g = 7$ m

$A = 5 \cdot 7 = 35\ \text{m}^2$

Trapezer



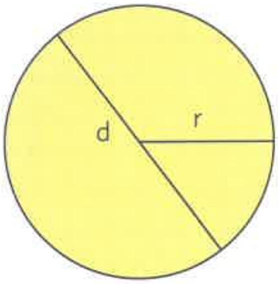
h: Højde
a og b: Parallelle sider
A: Areal

$A = \frac{1}{2} \cdot h \cdot (a + b)$

$h = 2$ cm
$a = 9$ cm
$b = 6$ cm

$A = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot (9 + 6) = 1 \cdot 15 = 15\ \text{cm}^2$

Cirkler



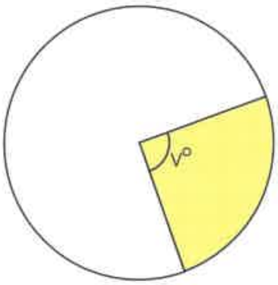
r: Radius
d: Diameter
A: Areal
O: Omkreds

$A = \pi \cdot r^2$
$O = 2 \cdot \pi \cdot r = \pi \cdot d$

$r = 5$ cm

$A = \pi \cdot 5^2 \approx 78{,}54$ cm^2
$O = 2 \cdot \pi \cdot 5 \approx 31{,}42$ cm

Cirkeludsnit



A: Areal

$$A = \frac{v}{360} \cdot \pi \cdot r^2$$

$v = 45°$
$r = 12$ m

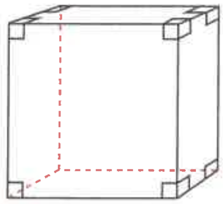
$$A = \frac{45}{360} \cdot \pi \cdot 12^2 \approx 56{,}55 \text{ m}^2$$

Rumfang og overflade

Terninger

s: Sidelængde
V: Rumfang
O: Overfladeareal

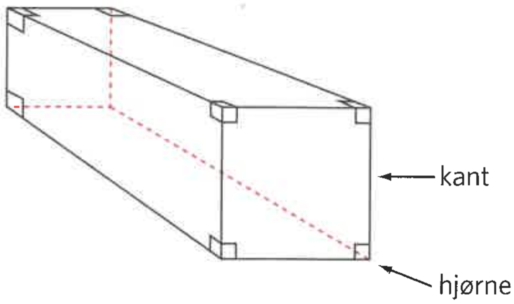
$V = s^3$
$O = 6 \cdot s^2$



$s = 5$ dm

$V = 5^3 = 125$ dm^3
$O = 6 \cdot 5^2 = 6 \cdot 25 = 150$ dm^2

Kasser



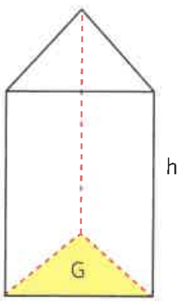
h: Højde
l: Længde
b: Bredde
V: Rumfang
O: Overfladeareal

$V = l \cdot b \cdot h$
$O = 2 \cdot (l \cdot h + h \cdot b + b \cdot l)$

$h = 3$ cm
$l = 5$ cm
$b = 6$ cm

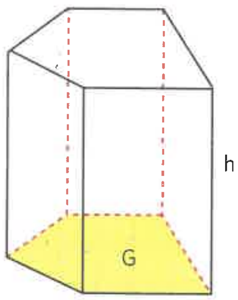
$V = 3 \cdot 5 \cdot 6 = 90$ cm^3
$O = 2 \cdot (5 \cdot 3 + 3 \cdot 6 + 6 \cdot 5) = 2 \cdot 63 = 126$ cm^2

Prismer



h: Højde
G: Areal af grundfladen
V: Rumfang

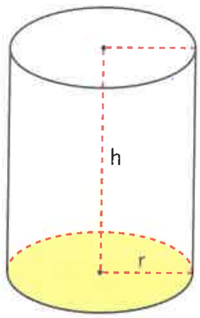
$V = h \cdot G$



$h = 12$ m
$G = 15$ m^2

$V = 12 \cdot 15 = 180$ m^3

Cylindre



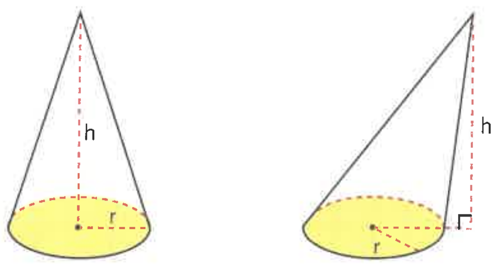
h: Højde
r: Radius
V: Rumfang
O: Den krumme overflade (uden top og bund)

$V = \pi \cdot r^2 \cdot h$
$O = 2 \cdot \pi \cdot r \cdot h$

h = 23 cm
r = 11 cm

$V = \pi \cdot 11^2 \cdot 23 \approx 8.743 \text{ cm}^3$
$O = 2 \cdot \pi \cdot 11 \cdot 23 \approx 1.590 \text{ cm}^2$

Kegler



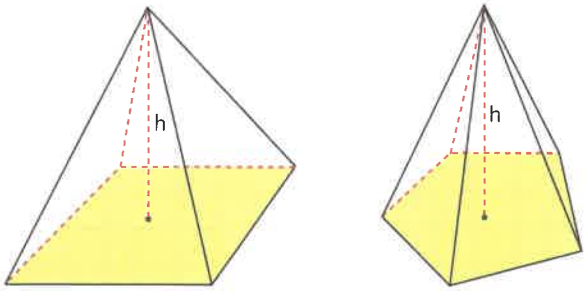
h: Højde
G: Areal af grundfladen
V: Rumfang

$V = \frac{1}{3} \cdot h \cdot G = \frac{1}{3} \cdot h \cdot \pi \cdot r^2$

h = 10 cm
r = 6 cm

$V = \frac{1}{3} \cdot 10 \cdot \pi \cdot 6^2 \approx 377 \text{ cm}^3$

Pyramider

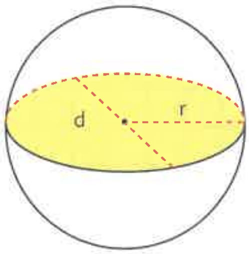


h: Højde
G: Areal af grundfladen
V: Rumfang

$$V = \frac{1}{3} \cdot h \cdot G$$

$h = 70$ m
$G = 4.900$ m^2
$$V = \frac{1}{3} \cdot 70 \cdot 4.900 \approx 114.333 \text{ m}^3$$

Kugler



r: Radius
d: Diameter
V: Rumfang
O: Overflade

$$V = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3$$

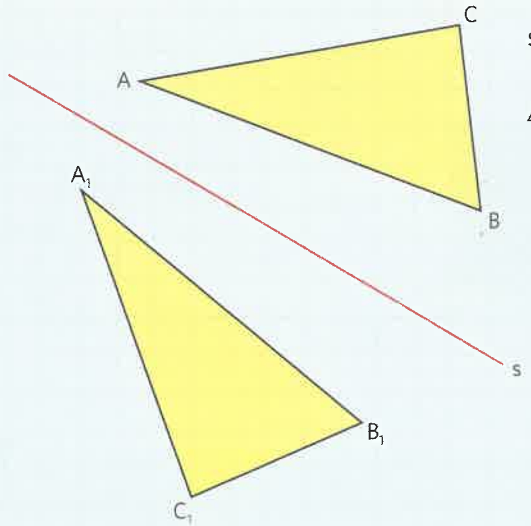
$$O = 4 \cdot \pi \cdot r^2$$

$r = 9$ cm
$$V = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot 9^3 \approx 3.054 \text{ cm}^3$$
$$O = 4 \cdot \pi \cdot 9^2 \approx 1.018 \text{ cm}^2$$

Flytninger

Når en figur flyttes, er det kun figurens placering, der ændrer sig. Den nye figur er kongruent med den oprindelige figur, dvs. at den har samme form og størrelse.

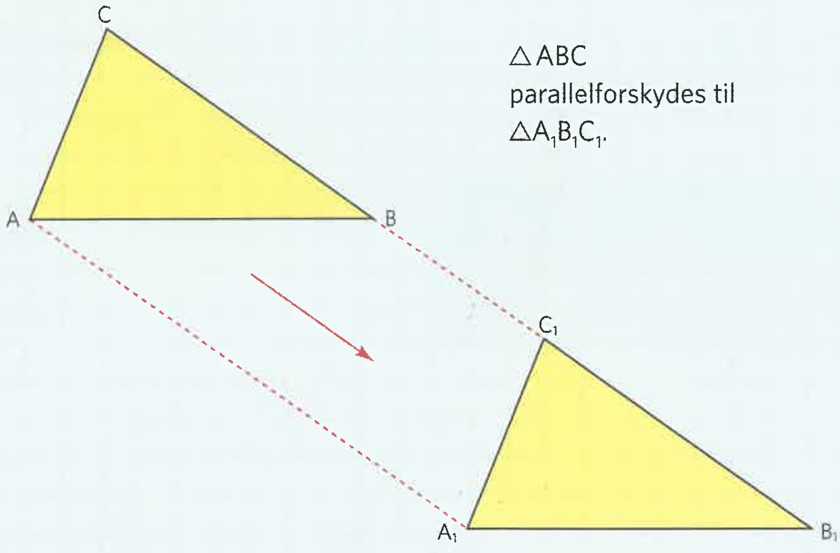
Spejling



s: Spejlingsakse

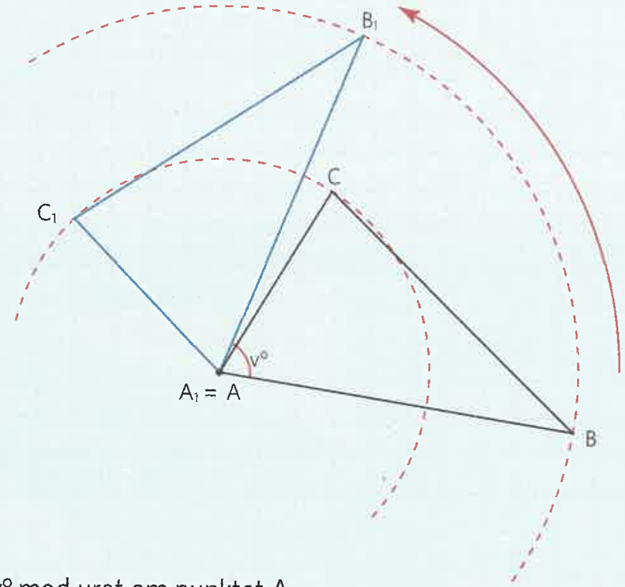
$\triangle ABC$ er spejlet i linjen s.

Parallelforskydning

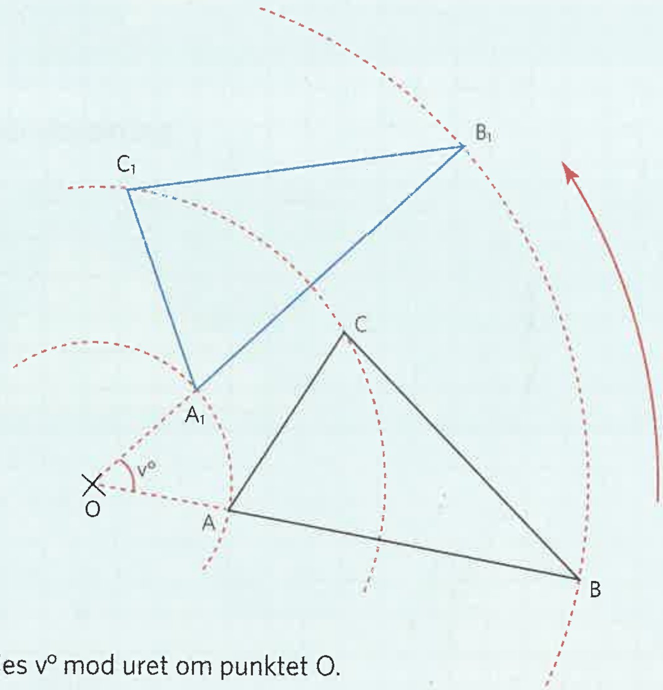


$\triangle ABC$ parallelforskydes til $\triangle A_1B_1C_1$.

Drejning



△ABC drejes v° mod uret om punktet A.



△ABC drejes v° mod uret om punktet O.

Målestoksforhold

Tegning : Virkelighed

Målestoksforhold: 1:800.000

Afstanden mellem Sandvig og Dueodde er 5 cm på kortet.

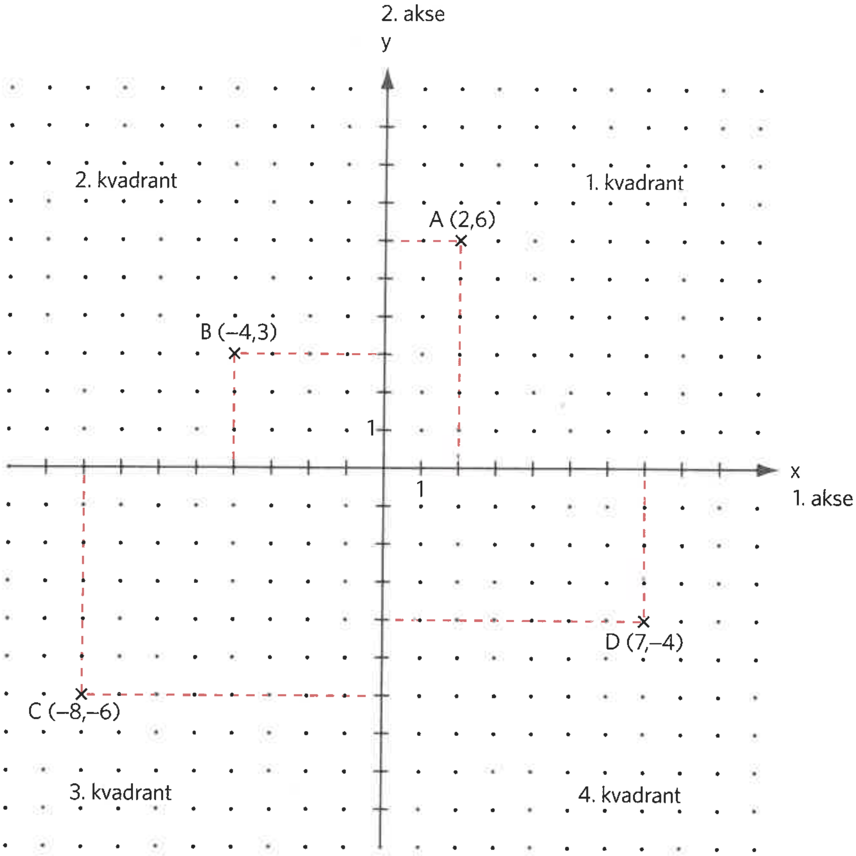
Afstanden er i virkeligheden:

$800.000 \cdot 5 \text{ cm} = 4.000.000 \text{ cm} = 40 \text{ km}$

Når det første tal i målestoksforholdet er mindst, er afstanden i virkeligheden større end afstanden på tegningen. Der er foretaget en *formindskelse* af virkeligheden.

Når det første tal i målestoksforholdet er størst, er afstanden på tegningen større end afstanden i virkeligheden. Der er foretaget en *forstørrelse* af virkeligheden.

Koordinatsystem

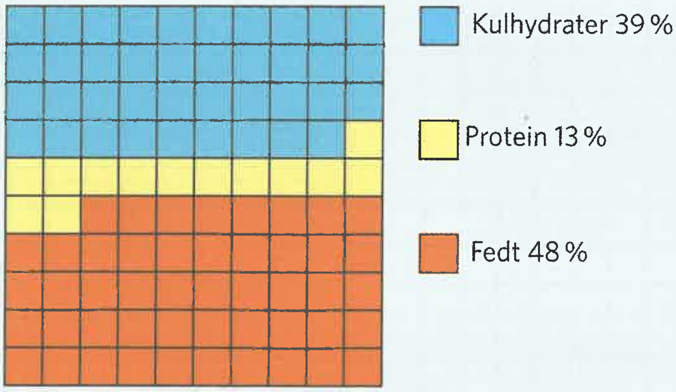


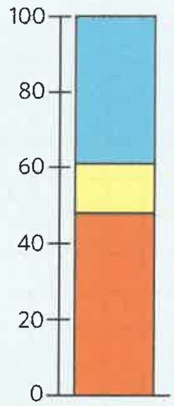
Statistik og sandsynlighed

Diagrammer til procentfordeling

Leverpostej indeholder 39 % kulhydrater, 13 % protein og 48 % fedt.

Procentdiagram



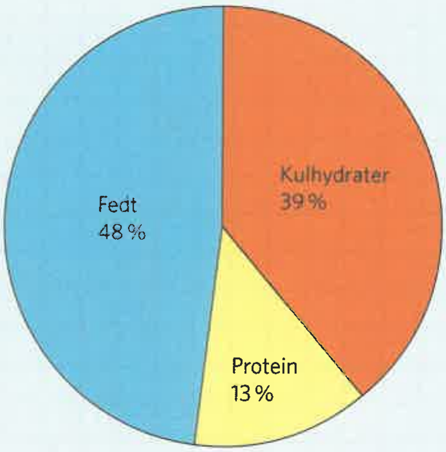


Cirkeldiagram

39 % af 360° ≈ 140°

13 % af 360° ≈ 47°

48 % af 360° ≈ 173°



Enkeltobservationer

Beskrivelse

Undersøgelse: Hvor mange mobiltelefoner findes i hjemmene hos en 9. klasse?
Resultatet af undersøgelsen:
4, 5, 1, 2, 3, 3, 3, 2, 2, 4, 4, 5, 3, 4, 4, 4, 4, 3, 3, 3, 4, 3, 4, 4, 4.

Observation x Antal mobiltelefoner i familien	1	2	3	4	5
Hyppighed h(x)	1	3	8	11	2
Summeret hyppighed H(x)	1	4	12	23	25
Frekvens f(x)	4 %	12 %	32 %	44 %	8 %
Summeret frekvens F(x)	4 %	16 %	48 %	92 %	100 %

Frekvensen og den summerede frekvens kan angives som decimaltal eller som procent. Den summerede hyppighed og den summerede frekvens kaldes også kumuleret hyppighed og kumuleret frekvens.

Statistiske deskriptorer

Observationssættets størrelse: Antal observationer.
Typetal: Den observation, der optræder oftest.
Middeltal: Gennemsnit. Summen af alle observationer i undersøgelsen divideret med observationssættets størrelse.
Median: Den midterste observation, når observationerne er ordnet efter størrelse. Hvis der er et lige antal, er det den mindste af de to midterste observationer.
Størsteværdi: Værdien af den største observation.
Mindsteværdi: Værdien af den mindste observation.
Variationsbredde: Forskellen på størsteværdi og mindsteværdi.
Kvartilsæt: Nedre kvartil, median og øvre kvartil. De observationer, der svarer til $F(x) \geq 25\,\%$, $F(x) \geq 50\,\%$ og $F(x) \geq 75\,\%$. Kan aflæses i et trappediagram.

Observationssættets størrelse: 25

Typetal: 4

Middeltal: $\frac{1 \cdot 1 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 8 + 4 \cdot 11 + 5 \cdot 2}{25} = 3,4$

Median: 1, 2, 2, 2, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3,
4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4,
5, 5.

Størsteværdi: 5

Mindsteværdi: 1

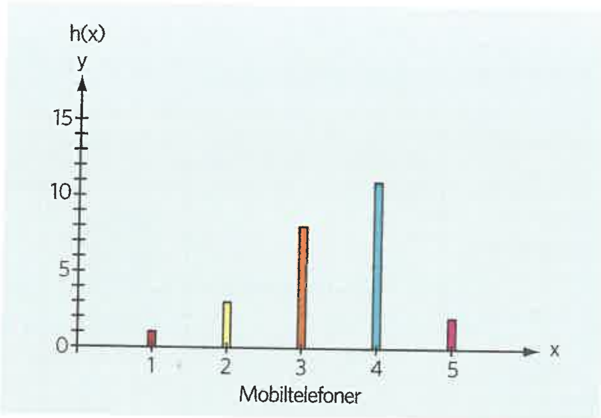
Variationsbredde: $5 - 1 = 4$

Kvartilsæt: (3, 4, 4)

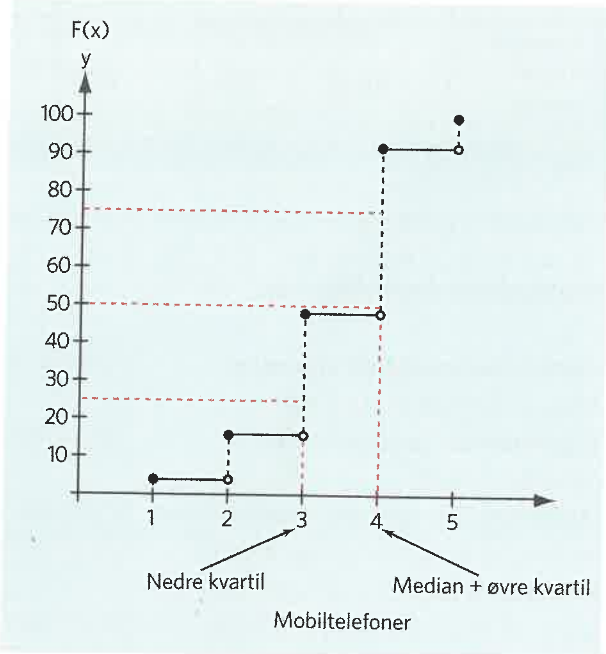
Illustrationer

Enkeltobservationer kan illustreres ved hjælp af pindediagrammer og trappediagrammer.

Pindediagram
Pindediagrammer anvendes til at illustrere hyppigheden. Pindene kan være tynde streger eller have bredde, men der skal være mellemrum mellem pindene.



Trappediagram
Trappediagrammer anvendes til at illustrere summeret hyppighed eller summeret frekvens. Diagrammet kan også bruges til at aflæse kvartilsæt.



Grupperede observationer

Beskrivelse

Observationer grupperes når der optræder mange forskellige observationer, eller når der er få eller ingen observationer, der er ens.

Undersøgelse: Hvor meget tjener eleverne i en 9. kl. på deres fritidsjob?

Interval x Kroner	]0;200]	]200;400]	]400;600]	]600;800]	]800;1.000]	]1.000;1.200]
Interval-hyppighed h(x)	2	5	8	4	1	5
Summeret interval-hyppighed H(x)	2	7	15	19	20	25
Interval-frekvens f(x)	8 %	20 %	32 %	16 %	4 %	20 %
Summeret interval-frekvens F(x)	8 %	28 %	60 %	76 %	80 %	100 %

Frekvensen og den summerede frekvens kan angives som decimaltal eller som procent.

Statistiske deskriptorer

Observationssættets størrelse: Antal undersøgte tilfælde.
Typeinterval: Det interval, der optræder oftest.
Middeltal: Gennemsnit. Intervallernes midtpunkt bruges til beregningen.
Kvartilsæt: De observationer, der svarer til $F(x) \geq 25\,\%$, $F(x) \geq 50\,\%$ og $F(x) \geq 75\,\%$.
Kan aflæses på sumkurven.

Observationssættets størrelse: 25

Typeinterval:]400;600]

Middeltal:
$$\frac{100 \cdot 2 + 300 \cdot 5 + 500 \cdot 8 + 700 \cdot 4 + 900 \cdot 1 + 1.100 \cdot 5}{25} = 596 \text{ kr.}$$

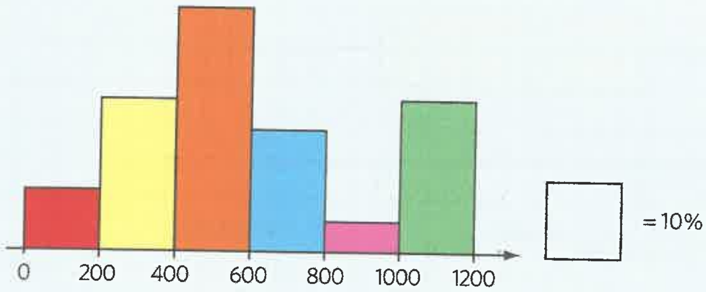
Kvartilsæt: $(370,\ 537\frac{1}{2},\ 787\frac{1}{2})$

Illustrationer

Grupperede observationer illustreres typisk ved hjælp af histogrammer og sumkurver.

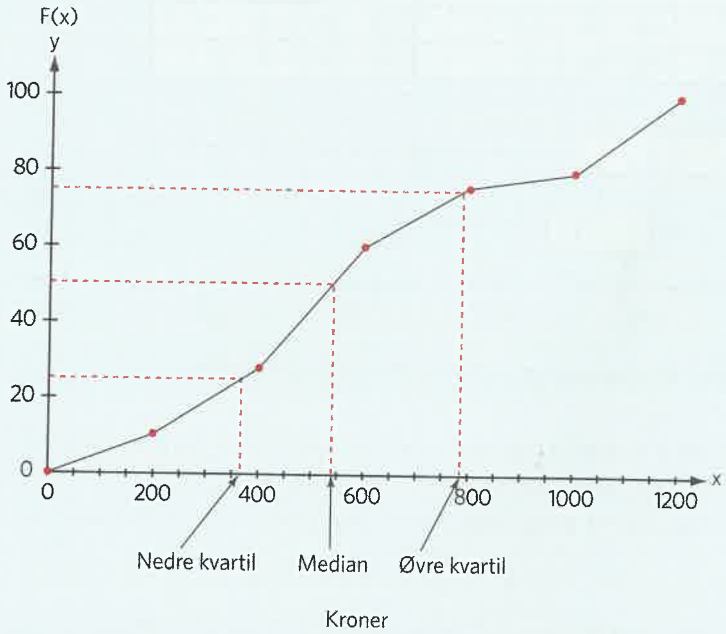
Histogram

Histogrammer anvendes til at illustrere intervalfrekvensen.



Sumkurve

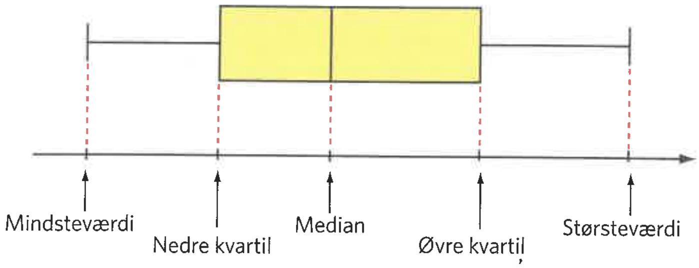
Sumkurver anvendes til at illustrere den summerede intervalfrekvens. Diagrammet kan bruges til at aflæse kvartilsæt.



Sammenligninger af observationssæt

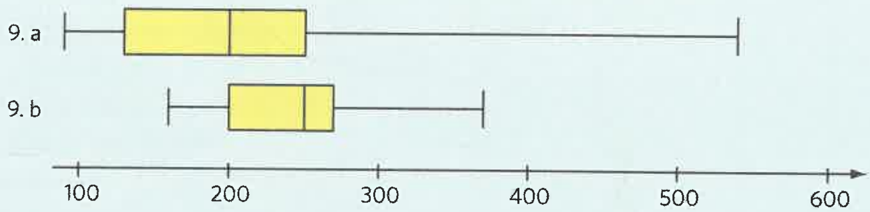
Boksplot

Når du vil sammenligne to undersøgelser, hvor observationssættenes størrelser er forskellige, kan du lave et boksplot for hver af undersøgelserne. Hertil bruger du frekvens og summeret frekvens. Boksplottet bruges til at illustrere forskellen på de to undersøgelsers resultater.



To 9. klasser sammenligner deres læsevaner. De undersøger, hvor mange sider hver elev har læst den sidste måned. Resultaterne ses i skemaerne nedenfor.

Resultater	9.a	9.b
Mindsteværdi	90	160
Størsteværdi	540	370
Variationsbredde	$540 - 90 = 450$	$370 - 160 = 210$
Kvartilsæt	(130, 200, 250)	(200, 250, 270)



Mulige kommentarer til sammenligningen af de to undersøgelser:

Variationsbredden i 9. a er større end variationsbredden i 9. b. Både det mindste antal læste sider og det højeste antal læste sider er i 9. a. Dvs. at der er større forskel på, hvor mange sider eleverne i 9. a har læst den sidste måned sammenlignet med eleverne i 9. b.

Man kan se, at halvdelen af eleverne i 9. a har læst 200 sider eller mere den sidste måned. I 9. b har halvdelen af eleverne læst 250 sider eller mere.

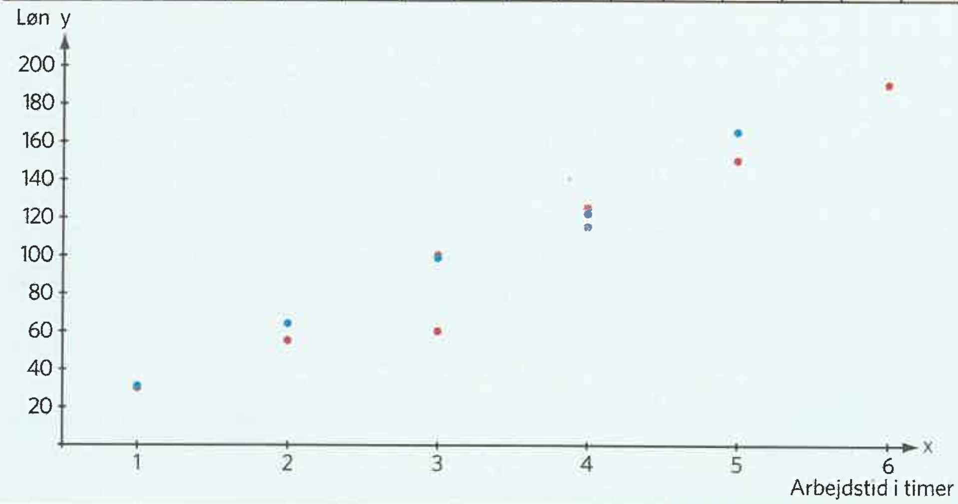
Analyser af observationssæt

Punktdiagram

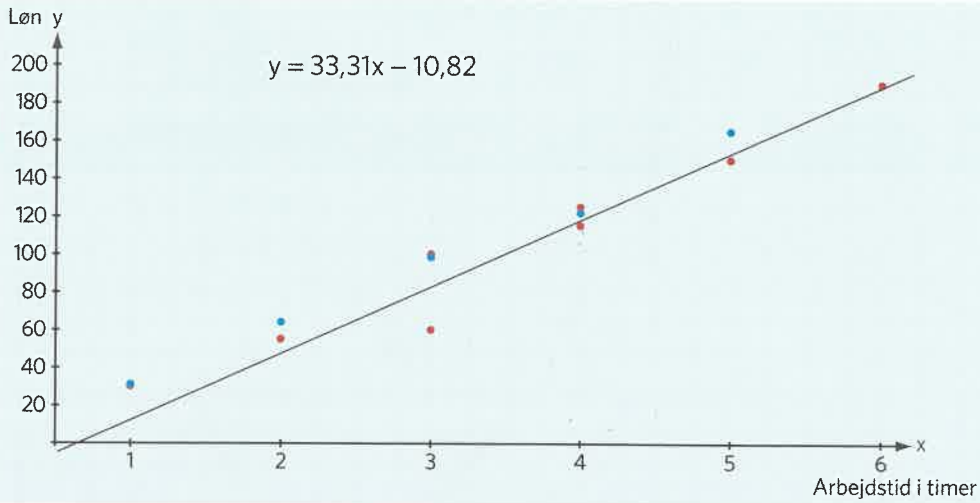
Et punktdiagram kan bruges til at undersøge, om der kan være en sammenhæng mellem to variable.

Er der en sammenhæng mellem løn og arbejdstid i 9. a?

Arbejdstid i timer	3	5	4	3	2	1	1	2	4	6	5	4	4	3
Løn	60	165	122	98	64	31	30	55	125	190	150	115	125	100

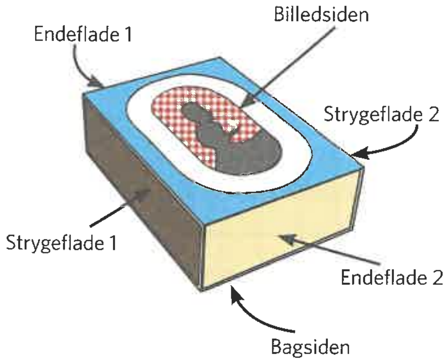


Når punkterne i et punktdiagram tilnærmelsesvis samler sig omkring en ret linje, er der en lineær sammenhæng mellem de variable. Den rette linje kaldes regressionslinjen eller tendenslinjen.



Statistisk sandsynlighed

Statistisk sandsynlighed bygger på eksperimenter eller foreliggende statistik.



Eksperiment: Der kastes 1.000 gange med en tændstikæske. Hvilken flade vender op?

Observation x	Billedside	Bagside	Endeflade 1	Endeflade 2	Strygeflade 1	Strygeflade 2
Hyppighed h (x)	432	464	12	9	40	43
Frekvens f (x)	43,2 %	46,4 %	1,2 %	0,9 %	4 %	4,3 %

Den statistiske sandsynlighed for at billedsiden vender opad er $\frac{432}{1.000} = 0{,}432 = 43{,}2\,\%$

Kombinatorisk sandsynlighed

Kombinatorisk sandsynlighed beregnes ud fra:

$$P(A) = \frac{\text{Antal gunstige udfald}}{\text{Antal mulige udfald}}$$

P(A): Sandsynligheden for udfaldet A.
Gunstige udfald: Antal muligheder for A.
Mulige udfald: Antal udfald der kan forekomme.

Udfaldsrum:
{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20}

Sandsynligheden for lykkehjulets udfald er lige store. Sandsynlighederne er derfor jævnt fordelt.

Sandsynligheden for udfaldet 17:
$P(17) = \frac{1}{20} = 0{,}05 = 5\,\%$

Sandsynligheden for udfaldet 3, 4, 5, 6 eller 7:
$P(3, 4, 5, 6, 7) = \frac{5}{20} = 0{,}20 = 20\,\%$

Matematik i anvendelse

Rente

$$R = \frac{K \cdot p \cdot d}{100 \cdot D}$$

R: Rente i kroner
K: Beløb i kroner, kapital
p: Rentesats, procent p.a. (pr. år)
d: Antal rentedage
D: Antal dage i et renteår

Hvor meget giver 2.500 kr. i rente, hvis rentesatsen er 2 % og pengene står i 160 dage?

$K = 2.500$
$p = 2$
$d = 160$
$D = 365$

$$R = \frac{2.500 \cdot 2 \cdot 160}{100 \cdot 365} \approx 21{,}92 \text{ kr.}$$

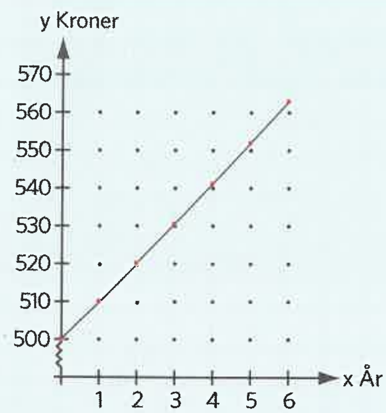
Sammensat rente

$$K_n = K(1 + r)^n$$

K: Startværdi
r: Vækst pr. periode angivet som decimaltal
n: Antal vækstperioder
K_n: Værdi efter n perioder

Du sætter 500 kr. i banken.
Rentesatsen er 2 % p.a.
Hvor meget står der på kontoen, hvis du lader pengene stå i 5 år?

K: 500 kr.
r: $2\,\% = 0{,}02$
n: 5
$K_5 = 500 \cdot (1 + 0{,}02)^5 \approx 552{,}04$ kr.



Valuta

Kursen er det beløb i danske kroner, som 100 enheder af den udenlandske valuta koster.

Kurs 89.
100 enheder af den fremmede valuta koster 89 kr.

Hvor meget koster et beløb af en fremmede valuta i danske kroner?

$$\frac{\text{Kurs}}{100} \cdot \text{Beløb i fremmed valuta}$$

En overnatning på et hotel koster 500 \$. Kursen er 567. Hvad er prisen i danske kroner?

$$\frac{567}{100} \cdot 500 = 2.835 \text{ kr.}$$

Hvor meget fremmed valuta kan man få for et antal danske kroner?

$$\frac{\text{Beløb i danske kroner}}{\text{Kurs}} \cdot 100$$

Kathrine har 1.000 kr., hun vil veksle til ferien i USA. Hvor mange dollars kan hun få, når kursen er 567?

$$\frac{1.000}{567} \cdot 100 \approx 176{,}37 \text{ \$}$$

Hvad er kursen?

$$\frac{\text{Beløb i danske kroner}}{\text{Beløb i fremmed valuta}} \cdot 100$$

Du kan få 557 norske kr. for 521 danske kr. Hvad er kursen?

$$\frac{521}{557} \cdot 100 \approx 93{,}54$$

Hvor meget kan man få af en valuta, hvis man betaler med en anden valuta?

$$\frac{\text{Kurs, valuta b}}{\text{Kurs, valuta a}} \cdot \text{Beløb i valuta b}$$

Hvor mange svenske kroner kan du få for 500 \$, når kursen på dollars er 567 og kursen på svenske kroner er 84,13?

$$\frac{567}{84{,}13} \cdot 500 \approx 3.369{,}78 \text{ svenske kr.}$$

Massefylde

Massefylde angives som g/cm^3, kg/dm^3 eller t/m^3.

Masse = Massefylde · Rumfang

$$\text{Massefylde} = \frac{\text{Masse}}{\text{Rumfang}}$$

$$\text{Rumfang} = \frac{\text{Masse}}{\text{Massefylde}}$$

Massefylden for guld er 19,3 g/cm^3.
En guldbarre fylder ca. 51,8 cm^3.
Hvor meget vejer guldbarren?
$19{,}3 \cdot 51{,}8 \approx 1000$ g

3 L olie vejer 2.400 g.
Hvad er oliens massefylde?
$3\ L = 3\ dm^3 = 3.000\ cm^3$

$$\frac{2.400}{3.000} = 0{,}8\ g/cm^3$$

En gryde i støbejern vejer 2 kg.
Støbejerns massefylde er 7,6 g/cm^3.
Hvad er grydens rumfang?
2 kg = 2000 g

$$\frac{2000}{7{,}6} \approx 263\ cm$$

Fart

Fart angives som m/s eller km/t.

$$\text{Fart} = \frac{\text{Vejlængde}}{\text{Tid}}$$

Vejlængde = Fart · Tid

$$\text{Tid} = \frac{\text{Vejlængde}}{\text{Fart}}$$

Mikael løber 5 km på en halv time. Hvad er Mikaels gennemsnitsfart?

$$\frac{5}{0{,}5} = 10\ km/t$$

$$\text{eller}\ \frac{5000}{30 \cdot 60} \approx 2{,}78\ m/s$$

Silas løber i 20 minutter med 12 km/t.
Hvor langt når han at løbe?

$$20\ \text{min} = \frac{20}{60} = \frac{1}{3}\ \text{time}$$

$$12 \cdot \frac{1}{3} = 4\ km$$

Lisa løber 15 km med 12 km/t.
Hvor længe løber hun?

$$\frac{15}{12} = 1{,}25\ t = 1\ t\ 15\ \text{min.}$$

Måleenheder

Længde

1 km	1 hm	1 dam	1 m	1 dm	1 cm	1 mm
1.000 m	100 m	10 m	1 m	0,1 m	0,01 m	0,001 m
10^3 m	10^2 m	10^1 m	10^0 m	10^{-1} m	10^{-2} m	10^{-3} m

Areal

1 km^2	1 hm^2	1 dam^2	1 m^2	1 dm^2	1 cm^2	1 mm^2
1.000.000 m^2	10.000 m^2	100 m^2	1 m^2	0,01 m^2	0,0001 m^2	0,000001 m^2
10^6 m^2	10^4 m^2	10^2 m^2	10^0 m^2	10^{-2} m^2	10^{-4} m^2	10^{-6} m^2
	1 ha					

Sjældent anvendte måleenheder

Rumfang

Liter kan både skrives med stort og med lille l. Herunder er det skrevet med et lille l. Vær opmærksom på, at det lille l nemt kan forveksles med et 1-tal.

1 km^3	1 hm^3	1 dam^3	1 m^3	1 dm^3	1 cm^3	1 mm^3
1.000.000.000 m^3	1.000.000 m^3	1.000 m^3	1 m^3	0,001 m^3	0,000001 m^3	0,000000001 m^3
10^{9} m^3	10^{6} m^3	10^{3} m^3	10^{0} m^3	10^{-3} m^3	10^{-6} m^3	10^{-9} m^3
			1 kl	1 l	1 ml	

1 m^3			1 dm^3			1 cm^3
1 kl	1 hl	1 dal	1 l	1 dl	1 cl	1 ml
1.000 l	100 l	10 l	1 l	0,1 l	0,01 l	0,001 l
			10 dl			
			100 cl			
			1.000 ml			

Vægt

1 t	1 kg	1 hg	1 dag	1 g	1 dg	1 cg	1 mg
1.000.000 g	1.000 g	100 g	10 g	1 g	0,1 g	0,01 g	0,001 g
				1.000 mg	100 mg	10 mg	

Sjældent anvendte måleenheder